И на дифурах, и на интурах в 4-м семе рассказывают задачу Ш-Л. Оказывается, она всплывает и в квантах – только об этом не говорят. Разберёмся:

Рассмотрим задачу Ш-Л:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\Psi}{dx^2} + {k_E}^2(x)\Psi(x) = 0 \\ \Psi(a) = \Psi(b) = 0 \end{cases}$$

Сначала поймём, как она всплывает в квантах. Мы просто решаем стационарного Шрёдингера:

$$\frac{\hat{p}^2}{2m}\Psi(x) + U(x)\Psi(x) = E\Psi(x)$$

$$\frac{h^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) + U(x)\Psi(x) = E\Psi(x)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) + \frac{2m}{h^2}\big(E - U(x)\big)\Psi(x) = 0$$

Введём замену

$$k_E^2(x) = \frac{2m}{h^2}\big(E - U(x)\big)$$

Вот и получаем

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + {k_E}^2(x) = 0$$

Ну и условия на концах

$$\Psi(a) = \Psi(b) = 0$$

очевидны: на границах ВФ должна к нулю стремиться, иначе не будет условия нормировки.

Отметим, что есть похожая задача – краевая задача:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\Psi}{dx^2} + k^2(x)\Psi(x) = f(x) \\ \Psi(a) = \Psi(b) = 0 \end{cases}$$

Но есть отличия от задачи Ш-Л. Главное – функция $k^2(x)$ теперь известна. Ведь в задаче Ш-Л она зависит от параметра (на кафмате λ, на квантах E):

$$k_E^2(x) = \frac{2m}{h^2}\big(E - U(x)\big)$$

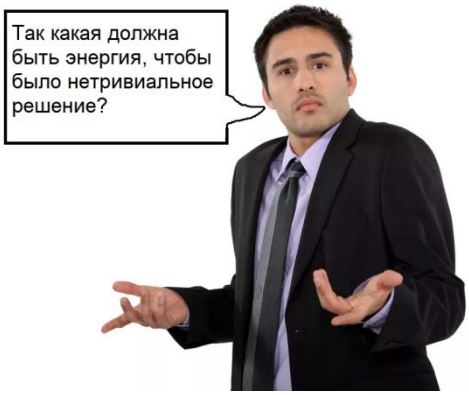
Именно поэтому у задач различаются формулировки:

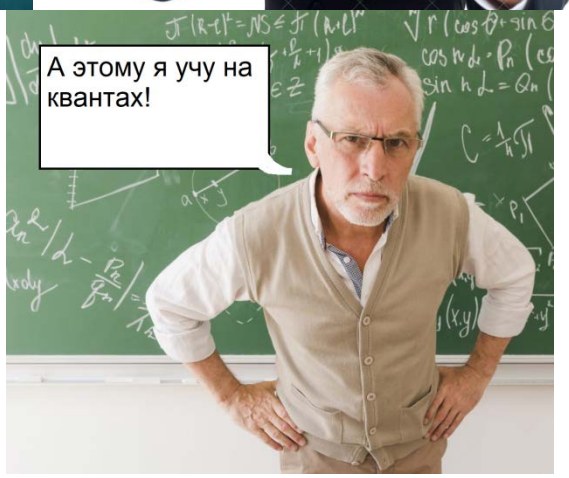
Краевая задача: найти $\Psi(x)$
Задача Ш-Л: найти, при каких значениях параметра E задача Ш-Л будет иметь нетривиальное решение.
Т.е. задача Ш-Л – это задача с параметром!
Если мы выберем E наугад, то у задачи

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\Psi}{dx^2} + {k_E}^2(x)\Psi(x) = 0 \\ \Psi(a) = \Psi(b) = 0 \end{cases}$$

будет всего 1 решение – тривиальное. Оно корректно по математике, но с точки зрения физики нам не подходит.

Задача Ш-Л – это подбор таких E, при которых таки есть, помимо тривиальное, ещё нетривиальное решение.
С точки зрения физики это как раз набор дискретных уровней энергии.





И вы на квантах и рассматривали многочисленные частные случаи.
При k(x)=k const (т.е.

Осталось обсудить ещё один вопрос. Мы писали задачу Ш-Л

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\Psi}{dx^2} + {k_E}^2(x)\Psi(x) = 0 \\ \Psi(a) = \Psi(b) = 0 \end{cases}$$

А кафмат её записывает как

$$\begin{cases} P(x)\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{p(x)d\Psi(x)}{dx}\right) + {k_E}^2(x)\Psi(x) = 0 \\ \Psi(a) = \Psi(b) = 0 \end{cases}$$

Записывая вторую производную более общим способом. Зачем?

В квантах в одномерии нам такое непотребуется. Иная ситуация в двумерии и трёхмерии, в полярной-цилинидрической-сферической системе координат.

Например, двумерие. Оператор квадрата импульса (т.е. лапласиан)

$$\Delta\Psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}$$

Выкинем пока сферическую составляющую (чего, вообще говоря, так просто делать нельзя, она даст центробежную поправку… но мы в 4-м семестре), так что можем:

$$\Delta\Psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)$$

и подставим в стационарное уравнение Шрёдингера:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial\Psi}{\partial r}\right) + {k_E}^2(r)\Psi(r) = 0 \\ \Psi(a) = \Psi(b) = 0 \end{cases}$$

Вот и пригодилась более общая формула.

Так что кафмат просто подготавливает почву для 5-го семестра, где будет многомерие.